

算术平均亚式期权 RQMC 定价中的路径构造

——共享随机输入下的配对实验

颜子墨

重庆邮电大学数学与统计学院 智能科学与技术 + 数学与应用数学, 重庆 400065

摘要: 离散算术平均亚式期权定价可表述为高维数值积分, 随机化准蒙特卡洛 (RQMC) 的有限样本表现会受到布朗路径构造及输入坐标组织的影响。本文在共享随机化 Sobol 输入、合约参数和名义路径数的条件下, 配对比较直接增量构造、布朗桥和 PCA, 并分别考察 RQMC 与 RQMC+ 几何控制变量。基于 100 个独立随机化重复, 本文联合报告路径线性方差集中、收益截断有效维数定位括区和配对误差区间, 并在 Bootstrap 中传播高预算数值参考的不确定性。结果显示, 在本文参数网格内, 布朗桥和 PCA 均降低了纯 RQMC 的有限样本 RMSE; 相较直接增量构造, 两种路径构造在路径层与收益层诊断中均表现出更强的前部坐标集中。加入几何控制变量后, 路径构造带来的误差改善仍然存在, 但相对幅度通常较小; 在采用的在线运行时间口径下, 24 个比较单元中均未出现 RMSE 排序与 $\text{RMSE}^2 \times$ 平均运行时间排序的反转。上述结果限于本文设定的 GBM 模型、参数网格、实现和计算环境, 不构成路径构造的一般理论优越性结论。

关键词: 随机化准蒙特卡洛; 算术平均亚式期权; 布朗路径构造; 有效维数; 控制变量

Brownian Path Construction in RQMC Pricing of Arithmetic Asian Options: A Paired Experiment with Shared Random Inputs

Zimo Yan

School of Mathematics and Statistics, Chongqing University of Posts and Telecommunications,
Chongqing 400065, China

Intelligent Science and Technology + Mathematics and Applied Mathematics

Abstract: Pricing a discretely monitored arithmetic Asian option leads to a high-dimensional integration problem in which the finite-sample performance of randomized quasi-Monte Carlo (RQMC) may depend on how Brownian paths are constructed and assigned to input coordinates. Using the same randomized Sobol inputs, contract parameters, and nominal path counts across methods, we conduct paired comparisons of direct increments, Brownian bridge, and principal component analysis under both plain RQMC and RQMC with a geometric control variate. Using 100 independent randomizations, we jointly examine linear variance concentration in the path mapping, grid-based bracketing estimates of the payoff truncation effective dimension, and paired error intervals, while propagating uncertainty in the high-budget numerical reference through the bootstrap. Within the evaluated grid, Brownian bridge and PCA reduce the finite-sample RMSE of plain RQMC. Relative to direct increments, both constructions exhibit stronger concentration in the leading coordinates under the path-level and payoff-level diagnostics. The gains persist after introducing the geometric control variate, although their relative magnitude is generally smaller. No ranking reversal is observed between RMSE and the $\text{RMSE}^2 \times$ mean-runtime efficiency measure across the 24 comparison cells under the adopted online-runtime protocol. These findings are specific to the stated GBM model, parameter grid, implementation, and computing environment and do not establish general theoretical superiority of any path construction.

Keywords: randomized quasi-Monte Carlo; arithmetic Asian option; Brownian path construction; effective dimension; control variate

1 引言

1.1 研究背景

许多衍生品价格可以表示为风险中性测度下贴现收益的期望。若收益只依赖到期价格，经典模型往往允许直接计算；若收益依赖整条路径，定价便转化为多维数值积分。离散算术平均亚式看涨期权使用多个监测价格的算术平均，其分布涉及相关对数正态变量之和，通常缺少与离散几何平均期权同样简洁、便于直接使用的闭式价格。这里的表述并不排除近似、积分表示或其他特殊处理，而是说明模拟方法在该问题中具有明确的计算角色。

金融蒙特卡洛研究已经形成普通抽样、控制变量及 QMC/RQMC 等成熟工具^[1-2]。几何平均亚式期权还为算术平均收益提供了经典控制变量^[3-4]。本文关注同一组随机化 Sobol 坐标经不同布朗路径映射后，有限样本误差、结构诊断与计算成本如何共同变化。

金融 QMC 应用的早期研究可见文献^[5]，QMC/RQMC 在金融计算中的方法与应用可参见文献^[6]的系统综述。^[7]、^[8]和^[9]从不同角度研究路径构造或高维路径依赖定价。控制变量方面，^[4]、^[10]、^[11]、^[12]及^[13]提供了 Asian 收益控制与综合方差缩减背景。对于仅能获得摘要的文献，本文不据此判断其是否包含某项具体实验设计。

1.2 相关研究

RQMC 的表现不仅取决于点数和名义维数，还取决于被积函数的重要变化是否集中在低序号坐标。直接增量构造按时间顺序把坐标分配给独立增量；布朗桥优先生成终点和较大时间尺度的中间点；PCA 则按布朗协方差矩阵特征值从大到小分配输入。三种构造都生成协方差相同的离散布朗向量，理论价格不因构造而改变，但同一有限 Sobol 点集在三种坐标系统中的积分误差可以不同。

这一区分也要求谨慎使用“有效维数”。监测数 m 只是名义维数；路径映射矩阵前几列解释的线性方差，是路径层的结构量；收益函数的截断有效维数还要经过指数资产映射、算术平均和正部函数。PCA 按特征值排序直接优化前者，却不自动优化后者。^[14]已在算术亚式期权中并列比较直接增量构造、布朗桥和 PCA，并报告路径累计方差与收益截断有效维数；^[15]、^[8]及^[16]进一步说明路径构造效果依赖具体收益结构。^[17]还在随机化重复中讨论路径生成成本。因此，三种构造及其有效维数解释并非本文提出。

控制变量与随机化重复同样已有直接先例。^[18]研究 QMC 控制变量和独立随机化重复；^[19]明确讨论路径构造与控制变量的联合使用；^[20]把 QMC 与几何控制变量用于算术平均亚式期权。^[21]以及^[22]则把 GSA、有效维数、路径构造和计算表现置于更广的期权研究中。本文对这些工作作补充，而不是以组合经典模块主张方法新颖性。

表 1 代表性最近邻文献与本文实验设计的对照

代表性研究已经分别讨论路径构造、有效维数、随机化重复、控制变量及时间效率。与这些工作相比，本文的重点是在统一的共享随机输入设计下，对三种构造进行

表 1 代表性最近邻文献与本文实验设计的对照

文献	Asian 案例	路径构造	随机化重复	CV	收益有效维数	配对区间	参考传播	时间效率
[14]	算术型	三种	是	否	是	未报告	否	是
[18]	算术型	否	是	是	否	未报告	否	资料不足
[15]	路径依赖	BB/PCA	资料不足	否	是	未报告	否	资料不足
[8]	高维 Asian	三种	资料不足	否	是	未报告	否	是
[19]	加权算术型	三种	QMC	是	是	未报告	否	是
[16]	加权算术型	三种	QMC	否	是	否	否	资料不足
[17]	算术型	三种	是	否	否	未报告	否	是
[21]	含 Asian	三种	是	否	GSA	未报告	否	是

注：“资料不足”表示现有可得材料不足以判断相应设计要素，不等同于该要素不存在。

重复级配对比较，并在同一参数网格中同时报告收益截断有效维数、配对误差区间、参考价格不确定性传播和在线计算效率。

1.3 研究问题与本文定位

本文在实验设计阶段预先设定五个研究问题：

1. **RQ1:** 在相同 Sobol 点、名义路径数和合约参数下，布朗桥与 PCA 相对直接增量构造是否降低 RQMC 的 RMSE？
2. **RQ2:** 路径构造的改善是否随监测数 $m \in \{12, 52, 252\}$ 变化？
3. **RQ3:** 路径构造在纯 RQMC 与 RQMC+ 几何控制变量中的相对改善是否一致？
4. **RQ4:** 误差变化能否由路径线性方差集中或收益截断有效维数提供结构性解释？
5. **RQ5:** 在本文预先规定的在线运行时间口径下，计入路径映射和收益计算成本后，RMSE 排序与 $\text{RMSE}^2 \times \text{平均运行时间}$ 排序是否发生变化？

原始研究协议对 RQ5 使用了较宽泛的“计算成本”表述。正式实验的效率判定严格依据预先确定的在线计时指标，不包含一次性的布朗桥计划生成和 PCA 分解。因此，本文关于 RQ5 和 H5 的结论仅对应当前实现下的热缓存在线计算口径。

1.4 本文贡献与结构

本文提供三方面补充证据。第一，共享随机输入使三种路径构造能够在重复层面配对，并以平方误差差和配对 Bootstrap 区间评价方法差异。第二，同一案例并列路径映射线性方差集中和收益截断有效维数，展示两类诊断与有限样本误差之间一致及不一致的部分。第三，本文联合比较纯 RQMC 与 RQMC+CV，并在配对分析中传播数值参考的不确定性。加入几何控制变量后，布朗桥和 PCA 相对直接增量构造的误差改善仍然存在；在本文采用的在线计时口径下，计算成本差异未改变 RMSE 排序。这些结果为经典路径构造在统一有限样本设计下的比较提供了可复现证据。

第 2 节说明模型、控制变量、RQMC 与三种路径构造；第 3 节界定路径方差和有效维数；第 4 节给出配对实验、参考价格和假设判定；第 5 节报告结果；第 6 节讨论稳健性与边界；第 7 节总结。早期五种基础估计器比较作为研究背景列入附录，不作为当前路径构造假设的正式检验。

2 模型与估计方法

主要符号说明

符号	含义	符号	含义
S_0	初始资产价格	K	执行价格
r	无风险利率	σ	年化波动率
T	到期时间	m	监测次数
N	RQMC 路径数	W_t	标准布朗运动
A_m	离散算术平均价格	G_m	离散几何平均价格
Y	算术亚式期权贴现收益	X	几何控制变量
d_{trunc}	截断有效维数	RMSE	均方根误差

2.1 风险中性 GBM 模型

风险中性 GBM、显式解与精确离散分别见式(2.1)–式(2.3)。

在风险中性测度 $\mathbb{Q}$ 下，标的资产遵循无股息、常参数几何布朗运动

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (2.1)$$

其中 $S_0 > 0$ 、 r 、 σ 和 W_t 分别为初始价格、连续复利无风险利率、年化波动率和标准布朗运动。其显式解为

$$S_t = S_0 \exp \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right]. \quad (2.2)$$

在等距网格上，代码使用同一解对应的精确一步转移

$$S_{t_j} = S_{t_{j-1}} \exp \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} Z_j \right], \quad \Delta t = \frac{T}{m}, \quad Z_j \sim N(0, 1). \quad (2.3)$$

2.2 离散算术平均亚式期权

监测网格、算术平均与贴现收益的数学口径见式(2.4)和式(2.5)。

监测时点为

$$t_j = \frac{jT}{m}, \quad j = 1, \dots, m, \quad (2.4)$$

初始价格 S_0 不计入平均。离散算术平均及固定执行价看涨收益为

$$A_m = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m S_{t_j}, \quad Y = e^{-rT} (A_m - K)^+. \quad (2.5)$$

所有方法估计 $C_A = \mathbb{E}^\mathbb{Q}[Y]$ ，贴现只应用一次。本文不考虑随机波动率、跳跃、交易成本、市场校准或参数估计误差。

2.3 几何平均控制变量

几何平均、解析控制期望和同样本控制变量估计分别见式(2.6)、式(2.10)和式(2.11)。

离散几何平均及其贴现收益为

$$G_m = \left(\prod_{j=1}^m S_{t_j} \right)^{1/m}, \quad X = e^{-rT} (G_m - K)^+. \quad (2.6)$$

由于 $\log G_m$ 为联合正态变量的线性组合，令

$$\mu_G = \mathbb{E}[\log G_m] = \log S_0 + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{T(m+1)}{2m}, \quad (2.7)$$

$$v_G = \text{Var}(\log G_m) = \sigma^2 T \frac{(m+1)(2m+1)}{6m^2}. \quad (2.8)$$

当 $v_G > 0$ 时，定义

$$d_1 = \frac{\mu_G - \log K + v_G}{\sqrt{v_G}}, \quad d_2 = \frac{\mu_G - \log K}{\sqrt{v_G}}, \quad (2.9)$$

则控制变量的解析期望为

$$\mu_X = \mathbb{E}[X] = e^{-rT} [e^{\mu_G + v_G/2} \Phi(d_1) - K \Phi(d_2)]. \quad (2.10)$$

当 $\sigma = 0$ 时使用确定性极限 $e^{-rT} \max\{S_0 e^{rT(m+1)/(2m)} - K, 0\}$ ，避免对零方差除法。本文使用同一次随机化内的样本协方差与样本方差估计

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_i (Y_i - \bar{Y})(X_i - \bar{X})}{\sum_i (X_i - \bar{X})^2}, \quad \hat{C}_{CV} = \bar{Y} - \hat{\beta}(\bar{X} - \mu_X). \quad (2.11)$$

没有独立 pilot 样本。因而同样本 $\hat{\beta}$ 带有有限样本随机性，本文不声称估计量在有限样本下严格无偏。算术—几何收益的高相关性解释控制修正为何可能有效，但相关性本身不是控制变量必然降低误差的理论证明。

2.4 随机化 Sobol 准蒙特卡洛

随机化数字网的方差性质参见^[23]。本文采用左线性矩阵随机化与数字随机移位,并按二次幂样本量生成随机化 Sobol 点。均匀点经端点保护后按式(2.12)映射为标准正态输入。

$$Z_{r,i,j} = \Phi^{-1}(U_{r,i,j}). \quad (2.12)$$

第 r 个 scramble 产生一个完整价格估计;经验 SD、RMSE 和 Bootstrap 都以 100 个独立 seed 对应的随机化点集为重复单位,不把点集内部单点视为 IID 观测。本文只有四个 N 水平,不估计或宣称渐近收敛阶。

2.5 三种布朗路径构造

2.5.1 直接增量构造

令 $\Delta t = T/m$ 。直接增量构造按时间顺序生成

$$\Delta W_j = \sqrt{\Delta t} z_j, \quad W_{t_j} = \sum_{\ell=1}^j \Delta W_\ell. \quad (2.13)$$

等价地, $\mathbf{W} = A_{\text{dir}} \mathbf{z}$, 其中

$$(A_{\text{dir}})_{j\ell} = \sqrt{\Delta t} \mathbf{1}\{\ell \leq j\}. \quad (2.14)$$

因此前部 Sobol 坐标主要控制早期独立增量;第 j 个坐标并不被重新排序。

2.5.2 布朗桥构造

布朗桥先用第一个坐标生成终点 $W_T = \sqrt{T} z_1$ 。给定两个已知端点 $t_l < t_k < t_r$, 中间点条件分布为

$$W_{t_k} | W_{t_l}, W_{t_r} \sim N\left(\frac{t_r - t_k}{t_r - t_l} W_{t_l} + \frac{t_k - t_l}{t_r - t_l} W_{t_r}, \frac{(t_k - t_l)(t_r - t_k)}{t_r - t_l}\right). \quad (2.15)$$

对任意正整数 m , 实现依次选择跨度最大的未完成区间, 再选择最接近区间中点的监测节点;并列按左端时间和较小时间索引打破。这个确定性顺序把终点和较大时间尺度变化优先分配给低序号坐标, 但不预设收益有效维数一定下降。

2.5.3 PCA 构造

离散布朗运动协方差矩阵为

$$\Sigma_{ij} = \min(t_i, t_j). \quad (2.16)$$

对其作对称特征分解

$$\Sigma = Q\Lambda Q^\top, \quad \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_m \geq 0, \quad (2.17)$$

并定义

$$A_{\text{PCA}} = Q \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_m}), \quad \mathbf{W} = A_{\text{PCA}} \mathbf{z}. \quad (2.18)$$

坐标按特征值降序进入主成分，特征向量符号按最大绝对元素为正的规则确定。PCA 直接集中的是布朗路径协方差的线性方差，而不是包含指数映射、算术平均和正部函数后的收益 ANOVA 有效维数。

三种构造均可写为 $\mathbf{W} = A_c \mathbf{z}$ ，并满足 $A_c A_c^\top = \Sigma$ 。它们只改变坐标映射，不改变目标布朗运动分布、合约、贴现、收益函数或控制变量公式。

3 路径方差集中与有效维数

3.1 名义维数与路径映射

本文严格区分四个概念：名义维数是标准正态输入坐标数并等于 m ；路径线性方差集中是映射矩阵前 k 列贡献的路径总线性方差比例；收益截断有效维数是前 k 坐标闭合 ANOVA 效应达到阈值所需维数；叠加有效维数则针对低阶交互 ANOVA 分量，本文不作估计。前两项是路径或输入层结构，收益截断有效维数由 IID pick-freeze 估计并带定位括区，三者不得相互替代。

令 $f \in L^2$ 定义在乘积概率空间上，其 ANOVA 分解为

$$f(\mathbf{z}) = \sum_{u \subseteq \{1, \dots, m\}} f_u(\mathbf{z}_u), \quad \text{Var}(f) = \sum_{u \neq \emptyset} \sigma_u^2, \quad \sigma_u^2 = \text{Var}(f_u). \quad (3.1)$$

给定约定阈值 $p \in (0, 1)$ ，叠加有效维数和截断有效维数分别定义为

$$d_{\text{sup}}(p) = \min \left\{ s : \sum_{0 < |u| \leq s} \sigma_u^2 \geq p \text{Var}(f) \right\}, \quad (3.2)$$

$$d_{\text{trunc}}(p) = \min \left\{ s : \sum_{u \subseteq \{1, \dots, s\}} \sigma_u^2 \geq p \text{Var}(f) \right\}. \quad (3.3)$$

[24]提出了 99% 有效维数表述；该比例是分析约定，不是固定理论常数。本文的数学定义和可变阈值写法以 Wang 与 Fang (2003) 为主要依据，取 $p = 0.99$ 为主要阈值、 $p = 0.90$ 为辅助阈值，只估计截断维数，不估计叠加维数。

3.2 路径线性方差集中

对 $\mathbf{W} = A\mathbf{z}$ ，定义

$$R_k^{\text{path}}(A) = \frac{\sum_{j=1}^k \|A_{:,j}\|_2^2}{\text{tr}(\Sigma)}. \quad (3.4)$$

该比例按实际 Sobol 坐标顺序累计，不对直接增量构造或布朗桥的列范数事后重排。PCA 情形下它等于前 k 个特征值占总特征值之比。本文报告达到 90% 和 99% 的最小坐标数，但只把它作为路径层结构诊断。

3.3 收益截断有效维数

主要被积函数固定为单条路径的贴现算术看涨收益 $f_c(\mathbf{z})$ 。每个诊断批次使用两个相互独立的 IID 标准正态矩阵 A 与 B ，并构造

$$C^{(k)} = (A_{1:k}, B_{k+1:m}). \quad (3.5)$$

前 k 坐标的闭合方差效应估计为

$$\widehat{S}_{1:k}^{\text{closed}} = \frac{\widehat{\text{Cov}}(f(A), f(C^{(k)}))}{\widehat{\text{Var}}(f(A))}. \quad (3.6)$$

每个“构造 $\times$ 监测数”组合使用 20 个 IID 批次，每批 2^{13} 个 A/B 样本对，并对批次进行 10000 次 Bootstrap；99% 是主要阈值，90% 是辅助阈值。

3.4 截断有效维数定位括区

单次随机化 Sobol 点集没有被用作 IID 诊断样本。初始评估网格为

$$\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 192, 224, 240, 248, m\} \cap [1, m]. \quad (3.7)$$

并仅在 99% 均值曲线首次跨越的相邻已评估点之间递归加入整数中点；90% 阈值复用最终形成的同一网格。原始前缀曲线不裁剪、不强制单调。对每个已评估前缀 k ，在 20 个批次上形成点态 95% 百分位 Bootstrap 区间 $[L_k, U_k]$ 。给定阈值 $p \in \{0.90, 0.99\}$ ，定位下界为 $1 + \max\{k : U_k < p\}$ （集合为空时取 1），定位上界为 $\min\{k : L_k \geq p\}$ ；二者相同才报告单值，否则报告定位括区。下界可能不是实际评估点，括区也不是同时置信区间。它是在稀疏评估网格和当前批次预算下对阈值位置的离散定位，不是对 $1, \dots, m$ 逐整数搜索得到的精确最小维数，且不涉及整数插值、事后平滑或叠加有效维数估计。

4 实验设计

4.1 参数设置

研究问题、方向性假设、路径构造定义和判定规则均在算法实现前预先设定。随后仅依据先导测试确定重复预算、分块和参考方案，未改变研究方向、参数网格或评价指标。

基准合约取 $S_0 = K = 100$ 、 $r = 0.03$ 、 $\sigma = 0.20$ 和 $T = 1$ 。平值设置减少深度实值时近线性收益或深度虚值时稀疏正收益对路径构造基准比较的干扰；一年期限和 20% 波动率提供中等幅度的常用数值案例，3% 的无风险利率只作固定计算输入。监测数 $m \in \{12, 52, 252\}$ 分别对应月度、周度与近似交易日监测；名义路径数为 $N \in \{2^{10}, 2^{12}, 2^{14}, 2^{16}\}$ 。三种路径构造分别与 RQMC、RQMC+CV 组合，每个单元使用 100 个独立随机化重复。

这些参数不是市场校准，也不能代表所有执行价格、期限或波动率。早期 v0.1 实验曾考察部分金融参数敏感性，但不属于本次路径构造假设的正式证据。当前设计只用于识别监测维数和数值映射下的有限样本差异，不研究合约横截面异质性。

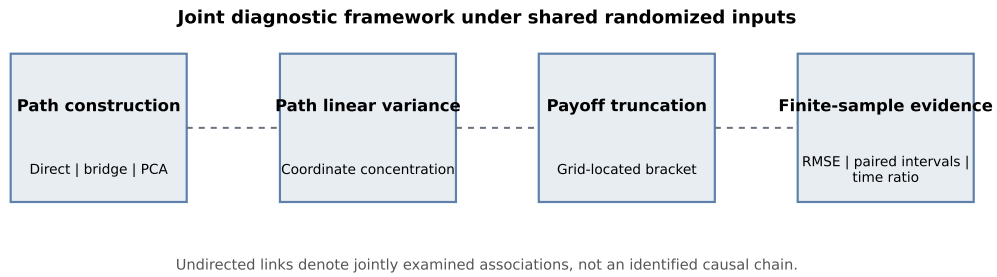


图 1 共享输入下的联合诊断框架 / Joint diagnostic framework under shared inputs

如图1所示，图中的无方向虚线表示本文联合考察的结构关联，不表示路径构造经由某项诊断导致误差变化，也不表示已识别的中介或因果链。

4.2 共享随机输入与配对设计

每个“监测数 $\times$ 样本量 $\times$ 重复”块只生成一次随机化 Sobol 矩阵及其逆正态输入。三种路径构造和两种估计器共享随机化种子、输入点、合约参数与行顺序；方法名称不参与随机化种子生成。三种构造只改变 Z 到 W 的确定性映射，因而路径构造差异可在重复层面严格配对。

4.3 Sobol 随机化与重复单位

每个 (m, N, r) 组合使用独立随机化种子；种子生成规则不依赖路径构造和估计器，因此同一重复内的六个方法单元共享相同基础 Sobol 输入。不同样本量分别生成随机化点集，本文不将其解释为嵌套设计。具体种子映射与端点处理规则列入复现材料。

纯 RQMC 每个单元计算 N 个算术收益；RQMC+CV 还计算 N 个几何收益，总收益评价数为 $2N$ 。因此，两种估计器分别报告，其结果不作等计算成本比较。路径构造之间采用相同分块策略；PCA 分解和布朗桥索引计划可缓存，但矩阵乘法和在线路径映射仍计入运行时间。具体字段和分块策略列入复现材料。

4.4 数值参考及其不确定性

本文报告的经验偏差、平方误差和 RMSE 均相对于监测数匹配的高预算数值参考计算,而非相对于未知的理论真值。 $m = 12$ 和 $m = 52$ 采用早期基础实验中与当前参数设置和数学口径一致的高预算数值参考; $m = 252$ 使用独立种子域的 PCA+RQMC+CV 主参考,并以直接增量构造 +RQMC+CV 进行交叉检查。

三个监测数的参考均值约为 5.63170、5.36388 和 5.29998,对应跨随机化标准误差约为 1.37×10^{-5} 、 1.74×10^{-5} 和 9.52×10^{-7} 。 $m = 252$ 的 PCA 主参考通过独立直接增量构造交叉检查;完整预算、更多有效数字和接受门槛列在补充材料中。这些参考价格仍属于数值估计,而非解析真值。

4.5 误差指标与配对 Bootstrap

对同一方法单元的 $R = 100$ 个独立随机化估计 $\hat{C}_r$,以 C_{ref} 表示对应监测数的高预算数值参考。为简化记号,下文将相对于该数值参考计算的经验偏差记为 Bias:

$$\text{Bias} = R^{-1} \sum_r \hat{C}_r - C_{\text{ref}}, \quad \text{RMSE} = \sqrt{R^{-1} \sum_r (\hat{C}_r - C_{\text{ref}})^2}, \quad (4.1)$$

经验 SD 使用样本标准差口径。主要效率指标为

$$\text{RMSE}^2 \times \bar{t}, \quad (4.2)$$

其中 $\bar{t}$ 是每次运行总时间的均值。路径构造相对直接增量构造报告 RMSE 比、RMSE 下降百分比、配对平方误差差及联合效率比。对候选构造 c 和基准构造 b ,这些量明确为

$$\Delta_{c,b}^{\text{MSE}} = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \left[(\hat{C}_{c,r} - C_{\text{ref}})^2 - (\hat{C}_{b,r} - C_{\text{ref}})^2 \right], \quad (4.3)$$

$$\rho_{c,b}^{\text{RMSE}} = \frac{\text{RMSE}_c}{\text{RMSE}_b}, \quad \text{Reduction}_{c,b} = 100(1 - \rho_{c,b}^{\text{RMSE}})\%, \quad (4.4)$$

$$\rho_{c,b}^{\text{eff}} = \frac{\text{RMSE}_c^2 \bar{t}_c}{\text{RMSE}_b^2 \bar{t}_b}. \quad (4.5)$$

Bootstrap 以完整六行 repetition 块为单位联合重采样 10000 次。具体地,每次复制从 $\{1, \dots, R\}$ 有放回抽取同一个索引向量 $(I_1^*, \dots, I_R^*)$,并将它同时用于三种路径构造和两种估计器,再在重采样块上完整重算上述非线性统计量;95% 区间取 2.5% 与 97.5% 经验分位数。只有 RMSE 比区间上界低于 1 且候选减直接增量构造的平方误差差区间上界低于 0 时,才称该单元的重复实验支持较低平均平方误差。这些区间是场景边际区间,不是传统假设检验,也没有跨场景多重性调整。

主分析先固定参考均值。稳健性分析对监测数 m 的参考随机化估计 $C_{m,1}^{\text{ref}}, \dots, C_{m,J}^{\text{ref}}$ 独立有放回重采样, 形成

$$C_m^{\text{ref},*} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J C_{m,J_j}^{\text{ref}}. \quad (4.6)$$

同一 Bootstrap 复制中, 同一 m 的全部方法和样本量共享该 $C_m^{\text{ref},*}$, 而正式方法重复仍按完整配对块重采样。固定参考与传播参考分别保存; 若二者给出不同等级, 采用更谨慎判定。三个参考标准误分别约为同一监测数下最小观察 RMSE 的 22.7%、33.1% 和 2.0%。因此尤其在 $m = 12, 52$ 时, 参考随机化误差不能自动忽略; 正文的头部 RMSE 不使用超出该量级所支持的额外小数。固定参考和共同传播参考不确定性的分析给出相同 H1—H5 判定, 说明结论对已建模的参考随机化处理稳定, 而不是说明参考价格没有误差。

4.6 预设研究假设

五项方向性假设及其操作规则在结果生成前确定。H1 和 H2 分别评价布朗桥、PCA 相对直接增量构造的中高维表现, 并把区间条件与路径层诊断结合; H3 比较不同监测数下的对数 RMSE 比; H4 分别评价加入几何控制变量后的额外改善和改善幅度收缩; H5 只考察 RMSE 排序与联合效率排序是否改变。完整门槛保留在附录。

H3 的预设规则只要求 32 个比较中至少一个边际区间不跨 0。由于该门槛较宽, 本文不以这一条件单独支持整体异质性结论, 而同时报告实际满足条件的比较数量、效应方向及参考价格传播后的结果, 并明确这些区间未经多重性调整。

4.7 计算时间与效率指标

正式实验使用 Windows 11、Python 3.12.7、NumPy 1.26.4 和 SciPy 1.13.1。运行时间结论因而只对应这一软件与硬件环境; 完整配置和复现说明见补充材料。

5 实验结果

5.1 路径线性方差集中

布朗桥和 PCA 把路径映射的线性方差集中到更少的前部坐标, 而且这种差距随监测数扩大 (见图2)。在 $m = 252$ 时, 直接增量构造达到 90% 和 99% 分别需要 173 和 228 个坐标, 布朗桥只需 4 和 34 个, PCA 只需 2 和 21 个。

图 2 中的累计比例是路径映射的线性结构量, 不是收益函数的有效维数。

PCA 在 90% 阈值下的集中最强, 布朗桥也明显改变了坐标分配。不过, 这一结果只涉及线性布朗路径; 是否转化为收益误差改善, 仍需收益层诊断和价格实验共同判断。

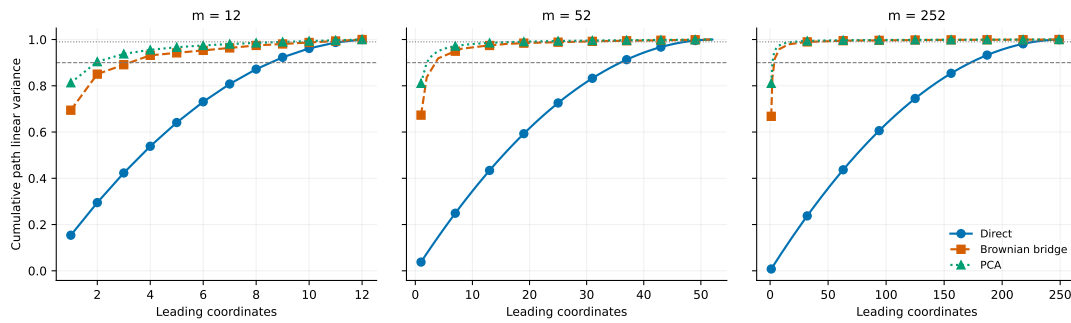


图 2 三种路径构造的累计路径线性方差 / Cumulative path-level linear variance

5.2 收益截断有效维数定位括区

收益层诊断与路径层排序方向一致，但它揭示了路径指标不能表达的非线性效果。表2报告 90% 和 99% 闭合前缀效应的点值或 Bootstrap 括区。

表 2 收益截断有效维数的离散网格定位括区

m	构造	90% 截断维数定位括区	99% 截断维数定位括区
12	直接增量构造	5–8	9–11
12	布朗桥	2	5–7
12	PCA	1	2
52	直接增量构造	17–32	43
52	布朗桥	2	7
52	PCA	1	2
252	直接增量构造	129–192	201–208
252	布朗桥	2	7–8
252	PCA	1	2

注：单值表示上下界按预设规则重合；括区来自稀疏前缀网格的点态 Bootstrap 区间，不等于逐整数搜索或同时置信区间。

表中单值表示预设规则所得上下界重合，区间表示只能在最终稀疏评估网格上定位。129 和 201 等定位下界不表示该前缀已经被直接评估；它们分别由最后一个区间上限仍低于阈值的已评估前缀加一得到。没有对未评估整数插值，也没有把点态区间解释为同时置信区间或强制曲线单调化。

最终评估前缀如下（D、B、P 分别表示直接增量、布朗桥和 PCA）：

$$\begin{aligned}
 m = 12 : \quad & D = \{1, 2, 4, 8, 10, 11, 12\}, \\
 & B = \{1, 2, 4, 6, 7, 8, 12\}, \quad P = \{1, 2, 4, 8, 12\}; \\
 m = 52 : \quad & D = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 42, 43, 44, 47, 52\}, \\
 & B = \{1, 2, 4, 6, 7, 8, 16, 32, 52\}, \quad P = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 52\}; \\
 m = 252 : \quad & D = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 192, 200, 204, 205, 206, 208, 224, 240, 248, 252\}, \\
 & B = \{1, 2, 4, 6, 7, 8, 16, 32, 64, 128, 192, 224, 240, 248, 252\}, \\
 & P = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 192, 224, 240, 248, 252\}.
 \end{aligned}$$

在 $m = 252$ 时，直接增量构造的 90% 和 99% 阈值只能定位为 129—192 和 201—208；布朗桥分别为 2 和 7—8；PCA 分别为 1 和 2。布朗桥在该监测数出现 2 次原始曲线单调性违例，PCA 出现 5 次，均被保留而未作单调化。

因此更准确的表述是：两类结构诊断与后续误差结果呈现一致方向，而不是路径特征值“完全解释”收益误差，更不能由此推断未估计的叠加有效维数。

5.3 纯 RQMC 定价误差

在 12 个 (m, N) 场景中，布朗桥和 PCA 相对直接增量构造的 24 项纯 RQMC 比较均满足 RMSE 比和平方误差差的双重区间条件。

布朗桥的 RMSE 比范围为 0.1032—0.3606，即相对直接增量构造下降 63.94%—89.68%；PCA 的范围为 0.0203—0.1562，即下降 84.38%—97.97%。

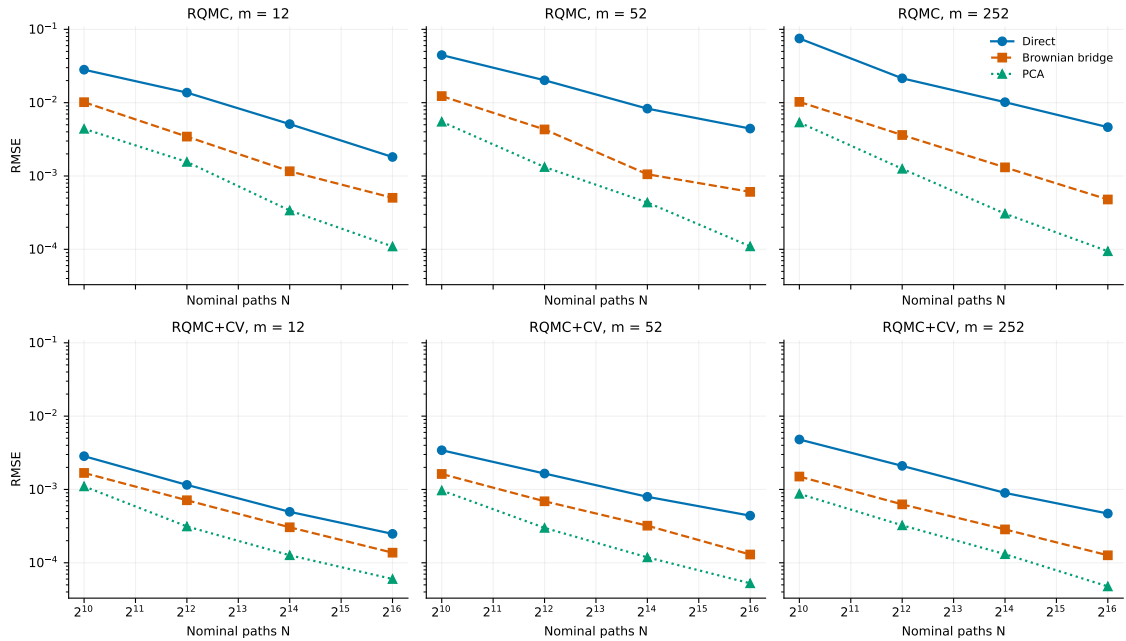


图3 两种估计器下三种路径构造的 RMSE / RMSE by estimator and path construction

图3以估计器和监测数分面；四个样本量只用于描述有限样本变化，不据此拟合或宣称渐近收敛阶。

以共同的 $N = 2^{14}$ 为例，布朗桥在 $m = 12, 52, 252$ 的 RMSE 比分别为 0.2275、0.1273 和 0.1291；PCA 分别为 0.0664、0.0525 和 0.0302。三种监测数下两个候选的 RMSE 比区间上界均低于 1，平方误差差区间上界均低于 0。

H1 的主集合只包含 $m = 52, 252$ 的 8 个布朗桥单元，实际 8/8 满足双重条件；H2 的 PCA 性能部分也为 8/8，且两个中高维监测数的路径 90% 与 99% 阈值都早于直接增量构造。因此 H1 和 H2 按预设规则均判为支持。在本文考察的参数网格中，PCA 的 RMSE 表现整体优于布朗桥；由于实验设计并未预设二者的固定排序，本文不将这一有限网格中的观察外推为一般结论。

5.4 RQMC 与几何控制变量联合结果

加入几何控制变量后，在 12 个 (m, N) 场景中的 24 项候选构造比较中，布朗桥和 PCA 相对直接增量构造仍均满足双重区间条件，但相对下降幅度小于纯 RQMC。布朗桥的 RMSE 比为 0.2696—0.6175，对应下降 38.25%—73.04%；PCA 为 0.1014—0.3871，对应下降 61.29%—89.86%。

在 $N = 2^{14}$ 时，布朗桥在 $m = 12, 52, 252$ 的 RMSE 比分别为 0.6155、0.4036 和 0.3179；PCA 分别为 0.2559、0.1494 和 0.1460。

加入几何控制变量后的衰减模式与其吸收部分共同收益变化的解释一致，但本研究没有识别因果机制。比值尺度变化、同一样本估计控制系数、算术收益的非光滑执行价边界、剩余误差结构变化和有限样本波动都可能影响观察到的幅度。现有结果不足以说明两类方法之间存在完全替代关系，也不足以识别上述衰减模式的因果机制。

5.5 路径构造与控制变量的联合表现

H4 的衰减统计量定义为 $\log(\rho_{CV}) - \log(\rho_{RQMC})$ ；正值表示加入 CV 后相对直接增量构造的路径构造改善较小。在 8 个中高维单元中，布朗桥和 PCA 各自的 8 个衰减区间下界都高于 0，跨单元中位数分别为 0.7973 和 1.0319。

同时，RQMC+CV 中的额外改善对两个候选均为 8/8 双重区间支持，覆盖两个监测数。两个预设维度均满足，H4 判为支持。

5.6 监测维数下的相对改善变化

在预设的 32 项跨监测数比较中，固定参考下 27 项边际 Bootstrap 区间未跨 0，传播参考得到相同计数，显示相对改善幅度在当前网格中具有广泛但并非统一的监测数差异。按预先设定的判定规则，H3 的结果与研究预期一致；但这一判定只表示满足预设计数门槛，不等同于家族级统计检验通过。

这些区间没有多重性调整，32 项比较也不是相互独立的家族级总体检验；因此不能据此给出总体显著性结论，也不表示布朗桥与 PCA 之间存在固定排序。

5.7 RMSE 与计算效率

路径构造的额外计算成本没有改变本次正式网格中的排名。纯 RQMC 中，布朗桥相对直接增量构造的 $\text{RMSE}^2 \times$ 平均运行时间比为 0.0118—0.1331，PCA 为 0.000412—0.0240；RQMC+CV 中相应范围为 0.0768—0.4001 和 0.0103—0.1481，均低于 1。

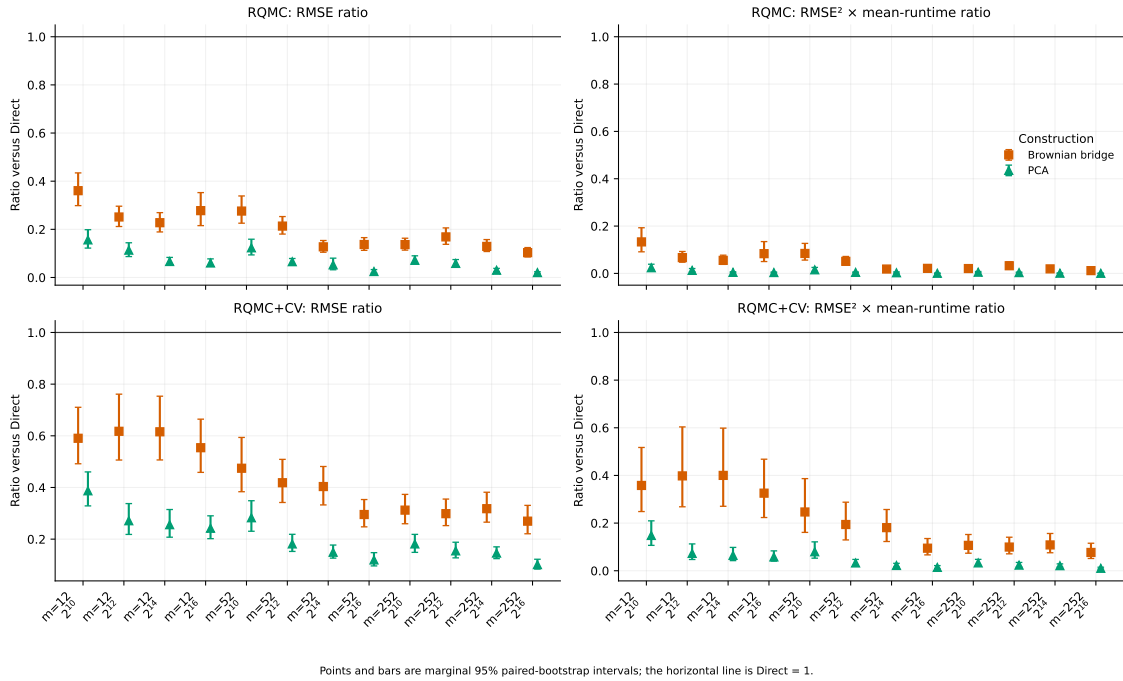


图 4 相对直接增量构造的 RMSE 比与联合时间效率比 / RMSE and joint-efficiency ratios relative to direct increments

图4的列分别报告 RMSE 比和 $\text{RMSE}^2 \times$ 平均运行时间比，行区分 RQMC 与 RQMC+CV；点和误差条均为边际配对 Bootstrap 区间，水平线 1 是直接增量构造基准。计时字段包含完整共享 Sobol 生成和逆正态时间以及在线路径、收益与估计计算，但不包含一次性 Bridge/PCA 预计算、I/O 或进程启动。13 条时间警告全部保留，因此效率比较仅对应当前硬件、热缓存实现和预先规定的在线计时口径。

24 个 (estimator, m, N) 单元的 RMSE 排序和联合效率排序完全相同，均为 PCA、布朗桥、直接增量构造，排名发生变化的单元为 0。

因此 H5 未得到支持。这不表示三种构造成本相同，只表示在既定运行时间口径、本机实现和正式网格内，成本差异没有大到改变排序。

5.8 预设假设结果汇总

表3依据预先设定的判定标准汇总结果。固定参考和传播参考给出相同判定；在 24 个组合中均未观察到 RMSE 排序与效率排序的反转，因此 H5 未得到支持。

表 3 核心比较与预设判断

Panel A: $N = 2^{14}$ 时相对直接增量构造的核心比较				
m	估计器	构造	RMSE 比 [95% 边际配对区间]	联合效率比 [95% 边际配对区间]
12	RQMC	布朗桥	0.2275 [0.1892, 0.2693]	0.0551 [0.0381, 0.0770]
12	RQMC	PCA	0.0664 [0.0520, 0.0833]	0.0044 [0.0027, 0.0069]
12	RQMC+CV	布朗桥	0.6155 [0.5066, 0.7533]	0.4001 [0.2706, 0.5986]
12	RQMC+CV	PCA	0.2559 [0.2075, 0.3147]	0.0647 [0.0425, 0.0980]
52	RQMC	布朗桥	0.1273 [0.1049, 0.1536]	0.0184 [0.0125, 0.0268]
52	RQMC	PCA	0.0525 [0.0320, 0.0803]	0.0027 [0.0010, 0.0064]
52	RQMC+CV	布朗桥	0.4036 [0.3325, 0.4812]	0.1809 [0.1227, 0.2570]
52	RQMC+CV	PCA	0.1494 [0.1265, 0.1771]	0.0221 [0.0158, 0.0312]
252	RQMC	布朗桥	0.1291 [0.1078, 0.1575]	0.0191 [0.0133, 0.0285]
252	RQMC	PCA	0.0302 [0.0241, 0.0378]	0.0009 [0.0006, 0.0014]
252	RQMC+CV	布朗桥	0.3179 [0.2657, 0.3816]	0.1084 [0.0755, 0.1564]
252	RQMC+CV	PCA	0.1460 [0.1245, 0.1702]	0.0213 [0.0155, 0.0288]

Panel B: 预设判断及其学术边界			
假设	主要结果	结果判定	解释范围
H1	布朗桥纯 RQMC 中高维 8/8 满足双重区间条件	支持	仅当前 m, N 网格
H2	PCA 路径阈值提前且中高维 8/8 满足性能条件	支持	路径集中不等于收益有效维数
H3	32 个跨 m 比较中 27 个边际区间不跨 0	与预期一致	根据预先规定的描述性规则；无家族级推断或多重性调整
H4	两候选额外改善各 8/8，且呈现正的衰减对比	支持	结构一致性，不是机制识别
H5	24 个单元中 0 个排名改变	不支持	依赖本机、实现和效率定义

注：固定参考与传播参考给出相同判定；在 24 个组合中均未观察到 RMSE 排序与效率排序的反转，因此 H5 未得到支持。

6 稳健性与研究边界

6.1 数值参考不确定性传播

固定参考与传播参考的 144 行路径构造比较分别保存。传播分析不使用正态近似，而是重采样对应监测数的参考随机化，并在同一复制内让全部方法共享参考抽样值。H1—H5 在两种参考模式下的等级完全一致，最终谨慎判定没有因参考传播而改变。

这说明当前判断对已建模的参考随机化较稳定，但不把参考价格变成数学精确值，也没有涵盖模型设定误差。 $m=252$ 另有不同路径构造的独立交叉检查； $m=12$ 和 $m=52$ 没有同等级的跨构造交叉检查，因此传播分析处理的是已记录随机化不确定性，不能排除共同实现或模型设定偏差。

6.2 多重比较边界

所有 Bootstrap 区间均为当前场景的边际 95% 区间。本文没有为跨构造、监测数、样本量和估计器的多重比较构造同时覆盖区间，也没有报告传统意义的整体显著性控制。H1—H5 依据预先设定的规则汇总边际证据，相关结论应与完整区间共同解读。

6.3 计算时间边界

正式效率口径使用每次运行总时间的均值，中位数和 SD 只作透明度补充。组内 Tukey 三倍四分位距规则标记 13 条运行时间警告，全部保留，没有删除或缩尾。

正式计时字段满足

$$\text{total_runtime} = \text{common_input_seconds} + \text{online_cell_seconds}. \quad (6.1)$$

前者完整计入一次共享 Sobol 点生成、端点处理和逆正态时间，并在六个方法单元中各自记录，不是六分之一摊销；后者计入路径映射、GBM 价格、收益及估计器计算。Bridge 计划和 PCA 分解在正式单元前预计算并缓存，其一次性 setup 另行记录但不进入该指标；I/O、Python 进程启动和垃圾回收也不计入。因而该比较更接近当前实现下热缓存的单方法在线口径，而非冷启动、摊销部署或完整端到端成本。

13 条警告反映系统调度、缓存和解释器状态可能影响短时计量。时间和联合效率结论只适用于记录的 Windows 环境、12 个逻辑处理器、代码实现、循环移位执行顺序与分块策略；实验未记录 BLAS 线程、CPU 频率或预热状态，不能据此比较所有硬件和部署方式的总成本。

6.4 可复现性与实现边界

共享随机化 Sobol 点与逆正态矩阵使路径构造差异具有配对关系；完整重复块联合 Bootstrap 保持了这种依赖。实验记录没有缺失方法、重复键、失败单元或非有限估计，并可由机器可读配置和复现材料追溯。种子映射、软件环境、完整运行日志和

逐图逐表生成说明置于补充材料。

6.5 模型、参数与解释边界

本文只研究常利率、常波动率、无股息 GBM 下的离散固定执行价算术平均亚式看涨期权。执行价格、波动率、到期日和初始价格在路径构造主网格中固定，监测等间隔，样本量只有四个水平；没有市场报价、校准、随机波动率、跳跃、交易成本或其他路径依赖产品。因此结果不能解释为真实市场定价验证、交易建议或其他资产过程上的一般结论。

路径线性方差集中、收益截断有效维数和 RMSE 在本实验中呈现方向总体一致的结构证据，但实验没有识别因果机制，也没有估计叠加有效维数。控制变量后的衰减模式与其吸收部分共同收益变化的解释一致，但比值尺度、同样本控制系数估计、非光滑收益边界、剩余误差结构和有限样本波动均是竞争解释。

7 结论

本文以共享随机输入的配对设计比较三种经典布朗路径构造。在本文参数设定与计算环境下，布朗桥和 PCA 相对直接增量构造均降低了 RQMC 与 RQMC+CV 的有限样本 RMSE。路径线性方差和收益截断有效维数总体上与误差表现方向一致，但这种一致性不是因果证明，PCA 特征值集中也不等同于收益有效维数。

相对改善幅度在当前监测数网格中存在差异。加入几何控制变量后，路径构造的额外改善仍然存在，但幅度通常收缩。在预先规定的在线计时口径下，24 个单元均未出现 RMSE 排序与 $\text{RMSE}^2 \times$ 平均运行时间排序的差异，因而关于排序可能改变的预设预期没有得到支持。

本文的主要贡献是，在统一的共享随机输入框架下，对三种经典路径构造的结构特征、有限样本误差及在线计算效率进行配对比较，并量化控制变量加入前后的相对表现。后续研究可进一步考察执行价格、波动率以及不同硬件和冷启动实现对误差—时间权衡的影响。上述结论限于本文的模型、参数网格和计算环境。

A v0.1 基础方法比较

早期基础实验先于路径构造协议，在直接增量构造下比较普通 MC、对偶变量、单独几何 CV、RQMC 和 RQMC+CV。它只为本研究选择 RQMC 及几何控制变量提供背景，不属于路径构造 H1—H5 的正式证据；完整表格和参数敏感性结果保留在复现包中。

早期 Bootstrap 因不同方法使用不同随机种子而采用独立重采样；路径构造实验则通过共享输入形成真正的配对重复。两个版本回答的问题和推断单位不同，不能把早期结果并入路径构造假设的计数。

B 有效维数补充结果

收益前缀闭合效应的 92 组汇总与 18 个阈值括区保留在可复现性材料中。

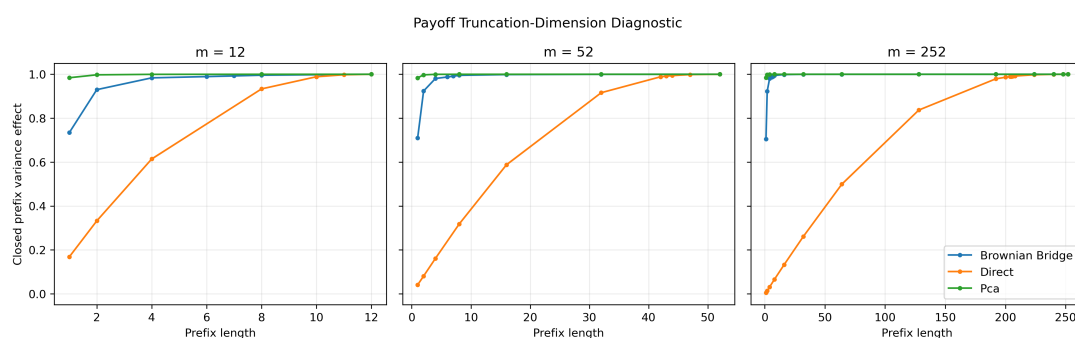


图 B1 完整收益前缀闭合效应曲线

完整配对 Bootstrap 区间以及数值参考、运行时间边界和复现说明保留在配套复现材料中，不在正文中重复列示。

数据与代码可用性

本研究的计算代码、环境说明、正式实验记录、处理数据、分析脚本及图表生成流程已整理为复现材料，可向作者合理索取。

利益冲突声明

作者声明不存在与本文研究相关的利益冲突。

参考文献

- [1] BOYLE P, BROADIE M, GLASSERMAN P. Monte Carlo Methods for Security Pricing[J/OL]. Journal of Economic Dynamics and Control, 1997, 21(8-9): 1267-1321. DOI: 10.1016/S0165-1889(97)00028-6.
- [2] GLASSERMAN P. Monte Carlo Methods in Financial Engineering[M/OL]. Springer, 2004. DOI: 10.1007/978-0-387-21617-1.
- [3] KEMNA A G Z, VORST A C F. A Pricing Method for Options Based on Average Asset Values[J/OL]. Journal of Banking & Finance, 1990, 14(1): 113-129. DOI: 10.1016/0378-4266(90)90039-5.
- [4] CURRAN M. Valuing Asian and Portfolio Options by Conditioning on the Geometric Mean Price[J/OL]. Management Science, 1994, 40(12): 1705-1711. DOI: 10.1287/mnsc.40.12.1705.
- [5] JOY C, BOYLE P P, TAN K S. Quasi-Monte Carlo Methods in Numerical Finance [J/OL]. Management Science, 1996, 42(6): 926-938. DOI: 10.1287/mnsc.42.6.926.

- [6] L'ECUYER P. Quasi-Monte Carlo Methods with Applications in Finance[J/OL]. Finance and Stochastics, 2009, 13: 307-349. DOI: 10.1007/s00780-009-0095-y.
- [7] ACWORTH P A, BROADIE M, GLASSERMAN P. A Comparison of Some Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Techniques for Option Pricing[G/OL]//Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods 1996. Springer, 1998: 1-18. DOI: 10.1007/978-1-4612-1690-2_1.
- [8] LIN J, WANG X. New Brownian Bridge Construction in Quasi-Monte Carlo Methods for Computational Finance[J/OL]. Journal of Complexity, 2008, 24(2): 109-133. DOI: 10.1016/j.jco.2007.06.001.
- [9] SABINO P. Efficient Quasi-Monte Simulations for Pricing High-Dimensional Path-Dependent Options[J/OL]. Decisions in Economics and Finance, 2009, 32(1): 49-65. DOI: 10.1007/s10203-009-0084-9.
- [10] HAN C H, LAI Y J. Generalized Control Variate Methods for Pricing Asian Options [J/OL]. Journal of Computational Finance, 2010, 14(2): 87-118. DOI: 10.21314/JCF.2010.212.
- [11] DINGEÇ K D, HÖRMANN W. Control Variates and Conditional Monte Carlo for Basket and Asian Options[J/OL]. Insurance: Mathematics and Economics, 2013, 52(3): 421-434. DOI: 10.1016/j.insmatheco.2013.03.002.
- [12] 詹惠蓉, 程乾生. 亚洲期权价格的一个新的多元控制变量估计[J]. 北京大学学报(自然科学版), 2004(1): 5-11.
- [13] 马俊海, 张维, 刘凤琴. 期权定价的蒙特卡罗模拟综合性方差减少技术[J]. 管理科学学报, 2005, 8(4): 68-73.
- [14] WANG X, FANG K T. The Effective Dimension and Quasi-Monte Carlo Integration [J/OL]. Journal of Complexity, 2003, 19(2): 101-124. DOI: 10.1016/S0885-064X(03)00003-7.
- [15] WANG X. On the Effects of Dimension Reduction Techniques on Some High-Dimensional Problems in Finance[J/OL]. Operations Research, 2006, 54(6): 1063-1078. DOI: 10.1287/opre.1060.0334.
- [16] WANG X, TAN K S. How Do Path Generation Methods Affect the Accuracy of Quasi-Monte Carlo Methods for Problems in Finance?[J/OL]. Journal of Complexity, 2012, 28: 250-277. DOI: 10.1016/j.jco.2011.10.011.
- [17] LEOBACHER G. Fast Orthogonal Transforms and Generation of Brownian Paths [J/OL]. Journal of Complexity, 2012, 28(2): 278-302. DOI: 10.1016/j.jco.2011.11.003.

- [18] HICKERNELL F J, LEMIEUX C, OWEN A B. Control Variates for Quasi-Monte Carlo[J/OL]. *Statistical Science*, 2005, 20(1): 1-31. DOI: 10.1214/088342304000000468.
- [19] WANG X, SLOAN I H. Quasi-Monte Carlo Methods in Financial Engineering: An Equivalence Principle and Dimension Reduction[J/OL]. *Operations Research*, 2011, 59(1): 80-95. DOI: 10.1287/opre.1100.0853.
- [20] XU L, ZHANG H, WANG F L. Pricing of Arithmetic Average Asian Option by Combining Variance Reduction and Quasi-Monte Carlo Method[J/OL]. *Mathematics*, 2023, 11(3): 594. DOI: 10.3390/math11030594.
- [21] SCOLERI S, BIANCHETTI M, KUCHERENKO S. Application of Quasi Monte Carlo and Global Sensitivity Analysis to Option Pricing and Greeks[J/OL]. *Wilmott*, 2021, 2021(116): 66-83. DOI: 10.1002/wilm.10972.
- [22] HOK J, KUCHERENKO S. Pricing and Risk Analysis in Hyperbolic Local Volatility Model with Quasi-Monte Carlo[J/OL]. *Risks*, 2022, 10(5): 106. DOI: 10.3390/risks10050106.
- [23] OWEN A B. Scrambled Net Variance for Integrals of Smooth Functions[J/OL]. *The Annals of Statistics*, 1997, 25(4): 1541-1562. DOI: 10.1214/aos/1031594731.
- [24] CAFLISCH R E, MOROKOFF W J, OWEN A B. Valuation of Mortgage-Backed Securities Using Brownian Bridges to Reduce Effective Dimension[J/OL]. *Journal of Computational Finance*, 1997, 1(1): 27-46. DOI: 10.21314/JCF.1997.005.